MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 KLASIK BERDASARKAN RATA-RATA HERONIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

RIYAN ABDULLAH
10454025660

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 KLASIK BERDASARKAN RATA-RATA HERONIAN

RIYAN ABDULLAH
NIM: 10454025660

Tanggal Sidang : 28Juni 2011
Tanggal Wisuda : November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas modifikasi Metode RK-4 Klasik berdasarkan Rata-rata Heronian. Metode Runge-Kutta orde-4 Klasik adalah salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh bahwa metode modifikasi Runge-Kutta orde-4 Klasik mempunyai galat orde 6 $O(h^6)$. Hasil simulasi numerik untuk beberapa kasus menunjukkan RK-4 Klasik lebih baik dibandingkan dengan RK-4 Klasik yang telah dimodifikasi.

Kata kunci: *Metode Runge-Kutta orde-4 Klasik, Rata-rata Heronian*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang masalah

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, dan pada persoalan rekayasa yang diberikan dalam bentuk persamaan differensial orde satu atau orde dua. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit. Model matematika yang rumit ini kadangkala tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah baku untuk mendapatkan solusi sejatinya (*exact solution*). Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan perhitungan numerik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa.

Beberapa perhitungan numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa adalah Euler, Heun, Taylor, dan Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta dikenal sebagai metode yang memiliki keakurasian lebih baik dibandingkan dengan ketiga metode tersebut.

Metode Runge-Kutta merupakan alternatif lain dari metode Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang tinggi dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x,y)$ pada titik terpilih setiap selang.

Metode Runge-Kutta orde empat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Beberapa modifikasi telah dilakukan pada metode Runge-Kutta orde empat, dari bentuk umumnya, Metode Runge-Kutta orde empat dapat dimodifikasi berdasarkan rata-rata Aritmatik seperti berikut ini:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_2+k_3}{2} + \frac{k_3+k_4}{2}\right)$$

Selain menggunakan rata-rata Aritmatik, modifikasi metode Runge-Kutta Orde 4 berdasarkan rata-rata Geometri telah dilakukan oleh Evans (1991), dan diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{16}(-k_1 + 9k_2))$$

$$k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{24}(-3k_1 + 5k_2 + 22k_3))$$

Selanjutnya, Sanugi dan Evans Yaacobs (1994) melakukan modifikasi Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata Harmonik,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h}{3}\left(\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3k_4}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1))$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{8}(-k_1 + 5k_2))$$

$$k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{8}(-5k_1 + 7k_2 + 18k_3))$$

Elvi Rahmila (2010) memperkenalkan modifikasi Range-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata Geometri dan rata-rata Centroidal.

Range Kutta orde empat berdasarkan rata-rata Geometri :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\left(\frac{-1}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\frac{-1}{8}k_1 + \frac{5}{24}k_2 + \frac{11}{12}k_3\right)\right)$$

Sedangkan modifikasi range-kutta orde empat berdasarkan rata-rata Centroidal

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h}{9}\left(\frac{k_1^{\ 2} + k_1k_2 + k_2^{\ 2}}{k_1 + k_2} + \frac{k_2^{\ 2} + k_2k_3 + k_3^{\ 2}}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^{\ 2} + k_3k_4 + k_4^{\ 2}}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan nilai $k_i + k_{i+1} \neq 0$

Penelitian yang telah dilakukan untuk memodifikasi metode Runge-Kutta tersebut, penulis tertarik untuk mengembangkan modifikasi yang dilakukan beberapa penulis dengan mengaplikasikan rata-rata Heronian terhadap metode Runge-Kutta orde 4. Oleh karena itu, judul pada tugas akhir ini adalah **”Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde-4 Klasik Berdasarkan Rata-rata Heronian”.**

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan rumusan dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata heronian.

1.3 Batasan Masalah

Penulis membatasi permasalahan pada penulisan tugas akhir ini yaitu tentang penyelesaian modifikasi metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata heronian.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumusan baru dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata heronian.

1.5 Sistematika Penulisan

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan menguraikan latar belakang pemilihan judul, tujuan penulisan, rumusan masalah, batasan masalah, serta sistematika penulisan tugas akhir.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisikan tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tulisan tugas akhir ini.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metode-metode yang dilakukan untuk memperoleh hasil yang dibutuhkan.

BAB IV Pembahasan

Bab pembahasan berisi langkah-langkah dan hasil dari pembuktikan modifikasi persamaan Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata Heronian.

BAB V Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1. Persamaan Differensial Biasa Orde 1

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Apabila turunan fungsi hanya bergantung pada satu variabel terikat, maka disebut persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation*), dan jika bergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan differensial parsial (*Partial Differential Equation*). Penulisan skripsi ini hanya akan membahas persamaan differensial biasa khususnya orde satu.

Bentuk baku Persamaan Differensial Orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai

$$y' = f(x, y)$$

Dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$ (2.1)

Terdapat dua cara untuk menyelesaikan PDB orde satu yaitu :

1. Metode Analitik

   Metode analitik adalah metode sejati karena ia meemberi kita solusi sejati (exact solution) atau solusi sesungguh nya yang memiliki galat sama dwngan nol. Beberapa persamaan differensial orde satu yang dapat diselesaikan secara analitik adalah :
   - Persamaan differensial orde satu yang dipisahkan
   - Persamaan differensial orde satu eksak
   - Persamaan differensial orde satu linier
2. Metode Numerik

   Metode numerik digunakan untuk persoalan rumit yang sering muncul dan sulit, atau tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Metode nemerik adalah metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatik biasa. Dengan metode numerik, hanya akan memperoleh nilai hampiran saja dan terdapat perbedaan dengan hasil solusi sejati. Sehingga aka nada selisih antara kedua nya yang disebut dengan error atau galat.

Beberapa metode numerik untuk menyelesaaikan persamaan differensial orde satu adalah:

– Metode Euler
– Metode Heun
– Metode Deret Taylor
– Metode Runge-Kutta

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret dalam bentuk polynomial, oleh karena bentuknya polynomial yang mudah diturunkan atau diintegralkan maka deret Taylor sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi yang rumit.

Teorema 2.1(Leithold Louis, 2003) Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai turunan pertama, kedua sampai turunan ke $n+1$ yang kontinu pada interval tutup $[a,b]$. Jika terdapat titik x_0 dan $x = x_0 + h$ yang berada pada interval buka (a,b) , maka akan ditunjukkan

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'(x_0)}{n!} h^k + O(h^{n+1})$$

Atau

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'(x_0)}{n!} h^k + O(h^{n+1}) \qquad (2.2)$$

Bukti :

Berdasarkan teorema kalkulus bahwa

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

atau

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx \tag{2.3}$$

selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'(x_0)}{n!} h^k + O(h^{n+1})$$

Penyelesaian bentuk $\int_a^b f'(x)dx$ pada persamaan (2.3) dilakukan dengan menerapkan integral parsial dan diperoleh

$$\int_a^b f'(x)dx = f'(x)(x-b)\int_a^b - \int_a^b (x-b)f'(x)dx$$

$$= f'(a)(b-a) - \int_a^b (b-x)f''(x)dx \tag{2.4}$$

substitusikan persamaan (2.4) ke persamaan (2.3) maka diperoleh

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-x)f''(x)dx \tag{2.5}$$

Integralkan kembali suku ke-tiga pada ruas kanan persamaan (2.5) dengan memisalkan

$u = f''(x)$, maka $du = f'''(x)$

$dv = (b-x)dx$, atau $dv = -(x-b)d(x-b)$

sehingga diperoleh

$$\int_a^b (x-b)f''(x)dx = -f''(x)\frac{(b-x)^2}{2}\Bigg|_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f'''(x)dx$$

$$= f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f'''(x)dx \tag{2.6}$$

subtitusikan persamaan (2.6) ke persamaan (2.5) diperoleh

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f'''(x)dx \tag{2.7}$$

Analog dengan cara di atas, dan jika dilakukan sebanyak n kali maka akan diperoleh bentuk

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n \tag{2.8}$$

Gantikan $a = x_0$ dan $b = x_0 + h$ untuk *i*=1, 2, 3,…,n maka persamaan (2.8), sehingga

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{2.9}$$

Untuk ukuran h yang cukup kecil, bentuk sisa dari persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk $O\left(h^{n+1}\right)$, sehingga persamaan (2.9) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'(x_0)}{n!}h^k + O(h^{n+1})$$

atau dapat juga ditulis

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + O(h^{n+1})$$

Pandang kembali persamaan (2.9) gantikan h dengan $(x - x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{2.10}$$

subtitusikan $x = x_1$ pada persamaan (2.8) diperoleh

$$f_1 = f(x_1) = f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \frac{f''(x)}{2!}(x_1 - x)^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!}(x_1 - x)^n$$

$$+ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x_1 - x)^{n+1} \tag{2.11}$$

Selanjutnya substitusikan $x = x_2 = x_1 + h$ pada persamaan (2.9) di atas diperoleh f_2 yang merupakan penyelesaian eksak pada $x = x_2$

$$f_2 = f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x_2 - x_1)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^n(x_1)}{n!}(x_2 - x_1)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x_2 - x_1)^{n+1}$$

dengan cara yang sama seperti langkah-langkah diatas akan diperoleh

$$f_{n+1} = f_n + f_n^{'}h + \frac{1}{2!}f_n^{''}h^2 + \frac{1}{3!}f_n^3h^3 + \frac{1}{4!}f_n^4h^4 + O(h^5) \tag{2.12}$$

dimana f_n^j adalah turunan ke- j dari $f(t)$ yang dihitung di $x = x_n$ dengan

n =1, 2, 3,…,n-1

$O(h^5)$ adalah dari orde h^5 keatas, semua suku berikutnya mengandung h pangkat 5 keatas.

Selanjutnya digunakan notasi subskrip untuk melambangkan turunan parsial, sebagai contoh

$$f := f(x,t), \; f_t := \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, \; f_x := \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}, \; f_{tt} := \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

$$f_{xx} := \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}, \; (f_{tx} \equiv f_{xt}) := \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x}$$

Contoh 2.1

$$f(x,t) = xte^{xt}$$

Akan dibuktikan bahwa $f_{tx} \equiv f_{tx}$

$$f_x = te^{xt} + t^2 xe^{xt}$$

$$f_{xt} = te^{xt} + xte^{xt} + 2xte^{xt} + x^2t^2e^{xt}$$

dan

$$f_t = xe^{xt} + x^2te^{xt}$$

$$f_{tx} = te^{xt} + xte^{xt} + 2xte^{xt} + x^2t^2e^{xt}$$

Kemudian akan diselesaian persamaan differensial biasa dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \tag{2.13}$$

atau

$$y' = f$$

sehingga diperoleh

$$y'' = f_t + y' f_y$$

$$= f_t + ff_y$$

$$y^{(3)} = f_{tt} + 2y' f_{ty} + f_y y'' + f_{yy}(y')^2$$

$$= f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_t f_y + ff_y^2$$

$$y^{(4)} = f_{ttt} + 3y' f_{tty} + 3(y')^2 f_{tyy} + 3y'' f_{ty} + y''' f_y + 3y' y''' f_{yy} + f_{yyy}(y')^3$$

$$= f_{ttt} + 3ff_{tty} + 3f_t f_{ty} + 5ff_y f_{ty} + 3f^2 f_{tyy} + 3ff_t f_{yy} + 4f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ f^3 f_{yyy} + f_{tt} f_y + f_y^2 (f_y + ff_y) \qquad (2.14)$$

Persamaan (2.12) dapat juga ditulis dalam bentuk seperti dibawah ini

$$y_{n+1} = y_n + y_n' h + \frac{1}{2!} y_n'' h^2 + \frac{1}{3!} y_n^{(3)} h^3 + \frac{1}{4!} y_n^{(4)} h^4 + O(h^5) \qquad (2.15)$$

Substitusikan persamaan (2.14) pada persamaan (2.15)

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{1}{2}(f_t + ff_y)h^2 + \frac{1}{6}(f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_t f_y + ff_y^2)h^3$$

$$+ \frac{1}{24}(f_{ttt} + 3ff_{tty} + 3f_3 f_{ty} + 5ff_y f_{ty} + 3f^2 f_{tyy} + 3ff_t f_{yy} + 4f^2 f_y f_{yy})$$

$$+ f^3 f_{yyy} + f_{tt} f_y + f_y^2 (f_t + ff_y)h^4 + O(h^5) \qquad (2.16)$$

Persamaan (2.16) adalah penyelesaian persamaan differensial biasa dengan deret Taylor.

Selanjutnya jika didefinisikan operator D yang merupakan bentuk standar untuk deret Taylor maka diperoleh

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{2.17}$$

dengan sifat-sifat sebagai berikut

$$Df = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$Df = f_t + ff_y$$

$$D^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} + f^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

$$D^2 f = f_{tt} + 2 ff_{ty} + f^2 f_{yy}$$

Apabila menggunakan operator (2.17), maka persamaan (2.14) menjadi

$$y' = f$$

$$y'' = Df$$

$$y^{(3)} = D^2 f + f_y Df$$

$$y^{(4)} = D^3 f + f_y D^2 f + 3Df_y + f_y^2 Df$$

Sehingga bentuk penyelesaian dengan deret Taylor (2.17)

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{1}{2} h^2 Df + \frac{1}{6} h^3 (D^2 f + f_y Df) + \frac{1}{24} h^4 (D^3 f + f_y D^2 f$$

$$+ f_y^2 Df + DfDf_y) + O(h^5) \tag{2.18}$$

Untuk bilangan real *p*, fungsi *f(x)* dapat dinyatakan sebagai deret

2.3 Metode Runge Kutta Orde-4

Metode Runge Kutta adalah alternatif lain dari deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan, dalam Metode Runge Kutta berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang tinggi dan sekaligus menghindarkan pencarian turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik pada selang langkah. Metode Runge Kutta dapat menyelesaikan persamaan differensial dan juga sistem persamaan differensial.

Metode Runge Kutta Berorde 4 adalah salah satu metode yang sangat terkenal dalam menyelesaikan persamaan differensial baik linear ataupun yang tak linear dan Metode ini juga banyak dipakai dalam praktek

Metode Runge Kutta berorde 4 mempunyai beberapa keuntungan yaitu sebagai berikut:

1. Tidak perlu mencari turunan-turunan fungsi terlebih dahulu sehingga penyelesaiannya lebih mudah.
2. Merupakan penyelesaian yang akurat dengan jumlah iterasi yang relative kecil.

Bentuk umum metode runge kutta orde 4 adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 \tag{2.19}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + p_2h, y_n + b_{21}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + p_3h, y_n + b_{31}k_1 + b_{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + p_4h, y_n + b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3) \tag{2.20}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $p_2, p_3, p_4, b_{31}, b_{32}, b_{41}, b_{42}, b_{43}$ untuk menentukan bentuk metode Runge Kutta orde 4.

Didefinisikan operator D_i yaitu bentuk standar untuk metode Runge Kutta orde 4 sebagai berikut

$$D_i = a_i \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \right) f \frac{\partial}{\partial y}, \text{ dengan } a_1 = 0 \text{ dan } i=1,\, 2,\, 3,\, 4 \tag{2.21}$$

atau

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_{21} f \frac{\partial}{\partial y}$$

$$D_3 = a_3 \frac{\partial}{\partial x} + (b_{31} + b_{32}) f \frac{\partial}{\partial y}$$

$$D_4 = a_4 \frac{\partial}{\partial x} + (b_{41} + b_{42} + b_{43}) f \frac{\partial}{\partial y}$$

Deret Taylor untuk fungsi dengan dua variable didefinisikan sebagai berikut

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[(x - x_n) \frac{\partial}{\partial t} + (y - y_n) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i f(x_n, y_n) \tag{2.22}$$

jabarkan ruas kanan pada persamaan (2.22)

$$\left((x - x_n) \frac{\partial}{\partial t} + (y - y_n) \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(x_n, y_n) = f$$

$$\left((x - x_n) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_n) \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(x_n, y_n) = (x - x_n) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_n) \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\left((x-x_n)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_n)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_n,y_n)=(x-x_n)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2(x-x_n)(y-y_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$+(y-y_n)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

.
.
.

Sehingga persamaan (2.22) dapat ditulis

$$f(x,y)=f+((x-x_n)f_t+(y-y_n)f_y)+((x-x_n)^2 f_{tt}+2(x-x_n)(y-y_n)f_{ty})$$
$$+(y-y_n)^2 f_{yy}+\ldots$$

Gunakan deret Taylor (2.22) dan operator D (2.21) maka persamaan (2.20) menjadi

$$k_1=hf \tag{2.23}$$

$$k_2=hf(x_n+p_2h,y_n+a_2hf$$

$$=h\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(p_2h\frac{\partial}{\partial x}+a_2hf\frac{\partial}{\partial y}\right)^i$$

$$=h\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(hD_2)^i$$

$$=f+fh^2+\frac{1}{2}D_2^2hf^3+\frac{1}{6}D_2^3fh^4+\frac{1}{24}D_2^4fh^5+O(h^6) \tag{2.24}$$

$$k_3=hf(x_n+p_3h,y_n+b_{31}k_1+b_{32}k_2)$$

$$k_3=h\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(p_3h\frac{\partial}{\partial x}+h(b_{31}+b_{32})f\frac{\partial}{\partial y}+b_{32}(k_2-hf)\frac{\partial}{\partial y}\right)^i$$

$$k_3 = h\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(p_3 h\frac{\partial}{\partial x} + \left(b_{31}k_1 + b_{32}k_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\right)^i$$

$$= h\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[hD_3 + b_{32}\left(D_2\, fh^2 + \frac{1}{2}D_2^2\, fh^3 + \frac{1}{6}D_2^3\, fh^4 + O\left(h^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i$$

$$= h\left[\ f + hD_3 f + f_y b_{32}\left(D_2\, fh^2 + \frac{1}{2}D_2^2\, fh^3 + \frac{1}{6}D_2^3\, fh^4\right) + \frac{1}{2}h^2 D_3^2 f\right.$$

$$+ b_{32}D_3 f_y\left(D_2\, fh^3 + \frac{1}{2}D_2^3\, fh^4\right) + \frac{1}{2}\, f_{yy}b_{32}^2\left(D_2 f\right)^2 h^4 + \frac{1}{6}h^3 D_3^3 f$$

$$= hf + D_3\, fh^2 + \left(f_y b_{32}D_2 f + \frac{1}{2}D_3^2 f\right)h^3 + \left(\frac{1}{2}\, f_y b_{32}D_2^2 f + b_{32}D_3 f_y D_2 f\right.$$

$$+ \frac{1}{2}b_{32}D_3^2 f_y D_2\, fh^4 + \frac{1}{24}h^4 D_3^4 f + O(h^5)$$

$$+ \frac{1}{6}D_3^3 f\Bigg)h^4 + \left(\frac{1}{6}\, f_y b_{32}D_2^3 f + \frac{1}{2}b_{32}D_3 f_y D_2^2 f + \frac{1}{2}\, f_{yy}b_{32}^2\left(D_2 f\right)^2\right.$$

$$+ \frac{1}{2}b_{32}D_3^2 f_y D_2 f + \frac{1}{24}D_3^4 f\Bigg)h^5 + O(h^6) \qquad (2.25)$$

$$k_4 = h\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[hD_4 + b_{42}\left(D_2\, fh^2 + \frac{1}{2}D_2^2\, fh^3 + \frac{1}{6}D_2^3\, fh^4\right) + b_{43}(D_3\, fh^2\right.$$

$$+ \left(f_y b_{32}D_2 f + \frac{1}{2}D_2^2 f\right)h^3 + \left(\frac{1}{2}\, f_y b_{32}D_2^2 f + b_{32}D_3 f_y D_2 f + \frac{1}{6}D_3^3 f\right)h^4\Bigg)$$

$$\left. + O(h^5)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i$$

$$k_4 = hf + D_4\, fh^2 + \left(f_y b_{42}D_2 f + f_y b_{43}D_3 f + \frac{1}{2}D_4^2 f\right)h^3 + \left(\frac{1}{2}\, f_y b_{42}D_2^2 f\right.$$

$$+\; f_y^{2} b_{32} b_{43} D_2 f + \frac{1}{2} f_y b_{43} D_3^2 f + b_{42} D_2 fD_4 f_y + b_{43} D_3 fD_4 f_y + \frac{1}{6} D_4^3 f \Big) h^4$$

$$+ \Big(\frac{1}{6} f_y b_{42} D_2^3 f + \frac{1}{2} f_y^2 b_{32} D_2^2 f + f_y b_{32} b_{43} D_3 f_y D_2 f + \frac{1}{6} f_y b_{43} D_3^3 f$$

$$+ \frac{1}{2} b_{42} D_2^2 fD_4 f_y + f_y b_{43} b_{32} D_2 fD_4 f_y + \frac{1}{2} b_{43} D_3^2 fD_4 f_y + \frac{1}{2} f_{yy} b_{42}^2 (D_2 f)$$

$$+ f_{yy} b_{42} b_{43} D_2 fD_3 f + \frac{1}{2} f_{yy} b_{43}^2 (D_3 f)^2 + \frac{1}{2} b_{42} D_2 fD_4^2 f_y$$

$$+ \frac{1}{2} b_{43} D_3 fD_4^2 f_y + \frac{1}{24} D_4^4 \Big) \tag{2.26}$$

Untuk mengetahui bentuk umum Metode Runge Kutta orde 4 pada persamaan (2.19) dan (2.20) harus ditentukan nilai parameter yang memenuhi persamaan tersebut, dengan menggunakan persamaan (2.23), (2.24), (2.25), dan (2.26) bentuk metode Runge Kutta (2.19) menjadi

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf + w_2 \left(hf + h^2 D_2 f + \frac{1}{2} h^3 D_2^2 f + \frac{1}{6} h^4 D_2^3 f \right) + w_3 \Big(hf + h^2 D_3 f$$

$$+ h^3 \left(\frac{1}{2} D_3^2 f + b_{32} f_y D_2 f \right) + h^4 \left(\frac{1}{2} b_{32} D_2^2 ff_y + b_{32} D_3 f_y D_2 f + \frac{1}{6} D_3^3 f \right) \Big)$$

$$+ w_4 \Big(hf + h^2 D_4 f + h^3 \left(b_{42} D_2 ff_y + f_y b_{43} D_3 f + \frac{1}{2} D_4^2 f \right) + h^4$$

$$\Big(\frac{1}{2} f_y b_{42} D_2^2 f + f_y^2 b_{32} b_{43} D_2 f + \frac{1}{2} f_y b_{43} D_3^2 f + b_{42} D_2 fD_4 f_y$$

$$+ b_{43} D_3 fD_4 f_y + \frac{1}{6} D_4^3 f \Big) \Big)$$

$$y_{n+n} - y_n = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) hf + h^2 (w_2 D_2 f + w_3 D_3 f + w_4 D_4 f)$$

$$+h^3\left(\frac{1}{2}w_2D_2^2 f+\frac{1}{2}w_3D_3^2 f+w_3b_{32}f_yD_2 f+w_4b_{42}D_2 ff_y+w_4 f_yb_{43}D_3 f\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}w_4D_4^2 f\right)+h^4\left(\frac{1}{6}w_2D_2^3+\frac{1}{2}b_{32}w_3D_2^2 ff_y+b_{32}w_3 f_yD_2 f+\frac{1}{6}w_3D_3 f\right.$$

$$+\frac{1}{2}w_4 f_yb_{42}D_2^2 f+w_4 f_y^2b_{32}b_{43}D_2 f+\frac{1}{2}w_4 f_yb_{43}D_3^2 f+b_{42}w_4D_2 fD_4 f_y$$

$$\left.+b_{43}w_4D_3 fD_4 f_y+\frac{1}{6}w_4D_4^3 f\right) \qquad (2.27)$$

Untuk memproleh nilai parameter pada (2.27) digunakan penyelesaian pendekatan deret Taylor (2.18) yaitu

$$y_{n+1}-y_n=hf+\frac{1}{2}h^2Df+\frac{1}{6}h^3(D^2 f+f_yDf)+\frac{1}{24}h^4(D^3 f+f_yD^2 f$$

$$+f_y^2Df+DfDf_y)+O(h^5) \qquad (2.28)$$

Berdasarkan persamaan (2.27) dan persamaan (2.28) maka diperoleh

$$w_1+w_2+w_3+w_4=1$$

$$w_2D_2 f+w_3D_3 f+w_4D_4 f=\frac{1}{2}Df$$

$$\frac{1}{2}w_2D_2^2 f+\frac{1}{2}w_3D_3^2 f+w_3b_{32}f_yD_2 f+w_4b_{42}D_2 ff_y+w_4D_4^2 f$$

$$+w_4Db_{43}f_yD_3 f=\frac{1}{6}(D^2 f+f_yDf)$$

$$\frac{1}{6}w_2D_2^3+\frac{1}{2}b_{32}w_3D_2^2 ff_y+b_{32}w_3D_3 f_yD_2 f+\frac{1}{6}w_3D_3^3 f+\frac{1}{2}w_4 f_yb_{42}D_2^2 f$$

$$+w_4 f_y^2b_{32}b_{43}D_2 f+\frac{1}{2}w_4 f_yb_{43}D_3^2 f+b_{42}w_4D_2 fD_4 f_y+b_{43}w_4D_3 fD_4 f_y$$

$$\left.+\frac{1}{6}w_4D_4^3 f\right)=\frac{1}{24}(D^3 f+f_yD^2 f+f_y^2Df+3DfDf_y) \qquad (2.29)$$

dari empat persamaan (2.29) w_i dan b_{ij} independent terhadap $f(y,t)$ dimana

$$\frac{D_2 f}{Df}, \frac{D_3 f}{Df}, \frac{D_4 f}{Df}, \frac{D_2 f_y}{Df_y}, \frac{D_3 f_y}{Df_y}, \frac{D_4 f_y}{Df_y} \tag{2.30}$$

hal ini dapat terjadi jika

$$a_2 = b_{21}$$

$$a_3 = b_{31} + b_{32}$$

$$a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43} \tag{2.31}$$

Subtitusikan bentuk (2.31), maka sistem (2.29) menjadi

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

$$w_2 a_2 + w_3 a_3 + w_4 a_4 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 a_2^2 + w_3 a_3^2 + w_4 a_4^2 = \frac{1}{3}$$

$$w_2 a_2^3 + w_3 a_3^3 + w_4 a_4^3 = \frac{1}{4}$$

$$w_3 b_{32} a_2 + w_4 (b_{42} a_2 + b_{43} a_3) = \frac{1}{6}$$

$$w_3 b_{32} a_2^2 + w_4 (b_{42} a_2^2 + b_{43} a_3^2) = \frac{1}{12}$$

$$w_3 b_{32} a_2 a_3 + w_4 a_4 (b_{42} a_2 + b_{43} a_3) = \frac{1}{8}$$

$$w_4 b_{32} b_{43} a_2 = \frac{1}{24} \tag{2.32}$$

Persamaan (2.32) adalah sistem persamaan yang terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter, hingga dapat dipilih 3 parameter bebas misalnya

$$p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{1}{2}, \; p_4 = 1 \tag{2.33}$$

maka

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

$$\frac{1}{2} w_2 + \frac{1}{2} w_3 + w_4 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} w_2 + \frac{1}{4} w_3 + w_4 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{8} w_2 + \frac{1}{8} w_3 + w_4 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} w_3 b_{32} + w_4 (\frac{1}{2} b_{42} + \frac{1}{2} b_{43}) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} w_3 b_{32} + w_4 (\frac{1}{4} b_{42} + \frac{1}{4} b_{43}) = \frac{1}{12}$$

$$w_3 b_{32} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} w_4 (\frac{1}{2} b_{42} + b_{43}) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} w_4 b_{32} b_{43} = \frac{1}{24}$$

dan diperoleh

$$b_{21} = \frac{1}{2}, \; b_{31} = 0, \; b_{41} = 0, \; b_{32} = \frac{1}{2}, \; b_{42} = 0, \; b_{43} = 1,$$

$$w_1 = \frac{1}{6}, \; w_2 = \frac{1}{3}, \; w_3 = \frac{1}{3}, \; w_4 = \frac{1}{6} \tag{2.34}$$

Kemudian substitusikan (2.33) dan (2.34) pada (2.18) dan (2.19) diperoleh rumus Metode Runge Kutta orde 4

Diperoleh bentuk umum penyelesaian metode Runge Kutta orde 4 untuk persamaan differensial biasa

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h.y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2.4 Galat Pemotongan

Pada aproksimasi polinomial di titik $n+1$ data, terdapat perbedaan atau eror terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan Galat pemotongan. Dengan menstubtitusikan sebuah derajat polinomial $p + 1$ kedalam rumus orde p dapat dibangun sebuah bentuk eror,

$$T(x,h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon)$$

Aplikasi Algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h) \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan *h*. definisikan *y*(*x*) sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap *x* akan berlaku:

$$T(x,h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x+h)$$

atau

$$galat\ pemotongan = solusi\ eksak - solusi\ hampiran$$

Jika *p* lebih besar dari bilangan integer *p'*, maka :

$$T(x,y) = O(h^{p'+1})$$

Contoh 2.2

Dengan menggunakan RK-4 tentukan penyelesaian masalah nilai awal

$$y' = 2xy + y, \;\; y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

pada selang [*0*,*2*].

Penyelesaian :

Terlebih dahulu akan ditentukan solusi eksak yaitu:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2xy + y = y(2x+1)$$

dengan menggunakan metode variabel terpisah maka akan didapatkan:

$$y = Ce^{x^2+x}$$

Untuk *y*(*0*) = 1maka *C* = 1sehingga:

$$y(x) = e^{x^2+x}$$

Substitusikan *x* = *0.2* pada $y(x) = e^{x^2+x}$ maka akan diperoleh solusi eksak,

$$y(0.2) = e^{0.24} = 1.27125$$

Sedangkan solusi hampiran dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 adalah :

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1.11071 + \frac{1}{6}(0.14789)$$

$$= 1.25860$$

dengan $k_1 = 0.13328$

$k_2 = 0.14717$

$k_3 = 0.14804$

$k_4 = 0.16364$

dan

$y_1 = 1.11071$

sedangkan nilai perbedaan atau erornya adalah :

$$e = y(0.20) - y_2$$

$$= 1.27125 - 1.25860$$

$$= 0.01265$$

2.5 Variasi Rata-Rata

Terdapat beberapa variasi rata-rata yang dapat digunakan untuk memodifikasi metode Runge Kutta orde empat. Beberapa diantaranya diberikan berikut ini:

Bila terdapat sekumpulan data $k_1 k_2 k_{3,},,, k_n$ maka formula untuk rata-rata aritmatik (AM) adalah sebagai berikut:

$$AM = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_n}{n}$$

Untuk n = 2 maka rata-rata aritmatik menjadi:

$$AM = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Bila terdapat sekumpulan data $k_1 k_2 k_{3,},,,k_n$ maka formula untuk rata-rata geometri (GM) adalah sebagai berikut:

$$GM = \sqrt[n]{k_1.k_2.k_3...k_n}$$

Untuk n = 2 maka rata-rata geometri menjadi:

$$GM = \sqrt{k_1 k_2}$$

2.6 Rata-rata Heronian *(Heronian Mean)*

Pada rata-rata heronian dua bilangan *a* dan *b* didefenisikan sebagai berikut:

$$HeM = \frac{1}{3}(a + \sqrt{ab} + b)$$

dengan syarat *a* dan *b* tidak bernilai negatif

Rata-rata ini muncul dalam penentuan volume sebuah piramida ataupun kerucut

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan skripsi ini hanya membahas secara teori modifikasi metode Runge-Kutta orde 4. Oleh karena itu, penelitian dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka yang berguna untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan baik berasal dari buku-buku, jurnal, maupun sumber-sumber dari internet.

Penulisan dimulai dengan mengenalkan Metode Runge-Kutta secara umum sampai orde ke-n. kemudian bentuk umum ini akan dikhususkan sampai pada Orde 4. Selain itu juga akan dikenalkan rata-rata Heronian. Setelah diperoleh bentuk umum Runge-Kutta Orde 4 dan rata-sehingga akan diperoleh rumusan baru.

Metodologi yang digunakan dalam penyelesaian skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Mengenalkan rumus metode Runge-Kutta Klasik
2. Mengenalkan rumus rata-rata Heronian
3. Pembentukan rumus Runge-Kutta berdasarkan rata-rata Heronian
4. Analisa dan kesimpulan

BAB IV

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT BERDASARKAN RATA-RATA HERONIAN

Dalam bab ini akan diturunkan metode Range Kutta orde empat berdasarkan rata-rata heronian, dengan cara menggantikan rata-rata aritmatik dengan rata-rata heronian

4.1. Modifikasi Metode RK-4 dengan Mempertimbangkan Rata-Rata Heronian

Beberapa modifikasi Metode Runge-Kutta telah banyak dihasilkan, seperti modifikasi bardasarkan rata-rata aritmatik, geometri, harmonik,centroidal dan rata-rata kontra harmonik. Pada Skripsi ini penulis akan membuktikan modifikasi metode Runge-Kutta Orde 4 berdasarkan rata-rata heronian.

Diketahui bentuk umum Runge-Kutta Orde 4 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.1}$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dapat dibentuk rumusan baru yang mengandung unsur Aritmatik sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_2+k_3}{2} + \frac{k_3+k_4}{2}\right) \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) dikenal sebagai Runge-Kutta Orde 4 berdasarkan Rata-rata Aritmatik. Bila rata-rata aritmatik diganti dengan rata-rata heronian diperoleh

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\left(\frac{k_1 + k_2 + \sqrt{k_1 k_2}}{3}\right) + \left(\frac{k_2 + k_3 + \sqrt{k_2 k_3}}{3}\right) + \left(\frac{k_3 + k_4 + \sqrt{k_3 k_4}}{3}\right)\right)$$

Dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + a_1 h, y_n + a_1 k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + (a_2 + a_3)h, y_n + a_2 k_1 + a_3 k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + a_4 + a_5 + a_6)h, y_n + a_4 k_1 + a_5 k_2 + a_6 k_4) \quad (4.3)$$

Kemudian akan ditentukan nilai $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ untuk menentukan bentuk metode Runge Kutta orde 4 berdasarkan rata-rata heronian.

Ekspansikan nilai-nilai k_1, k_2, k_3, k_4 dengan menggunakan deret taylor yang telah diperoleh hasil seperti persamaan (2.23) - (2.26)

Langkah berikutnya adalah dengan mensubstitusikan nilai-nilai k_1, k_2, k_3, k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (2.23) – (2.26) ke persamaan (4.3). sedangkaan untuk menghindari adanya polinomial dalam bentuk tanda akar, di gunakan ekspansi deret binomial sebagai berikut :

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{5}{128}x^4$$

Sehingga diperoleh hasil seperti berikut :

$$\sqrt{k_1 k_2} = f + h\left(\frac{a_1 ff_y}{2}\right) + h^2\left(\frac{2f^2 f_{yy} - ff_y{}^2)}{8}\right) \quad (4.4)$$

$$h^3\left(\frac{a_1{}^3 4f^3 f_{yyy} - 6f^2 f_y f_{yy} - 3ff_y{}^3}{48}\right)$$

$$\sqrt{k_2k_3} = f + h\left(\frac{(a_1 + a2 + a3)\, ff_y}{2}\right) + h^2\left(\begin{array}{l}\left(\frac{a_1^{\,2} f^2 f_{yy}}{8}\right) + \frac{(a_2a_3)2 f^2 f_{yy}}{4} - \\ \frac{21(a^2 + a^3)2\, ff_y^{\,2}}{128} + \\ \frac{43a_1a_3\, ff_y^{\,2}}{64} + \frac{11a_1a^2\, ff_y^{\,2}}{64} - \frac{21a_1 2\, ff_y^{\,2}}{128}\end{array}\right)$$

$$h^3\left(\frac{a_1^{\,3} f^3 f_{yyy}}{12} + \frac{(a_2 + a_3)^3 f^3 f_{yyy}}{12} + \frac{a_1\, ff_{yy}^{\,3}}{16} + \frac{(a_2 + a_3)^3\, ff_y^{\,3}}{16}\right)$$

$$\sqrt{k_3k_4} = f + h\left(\frac{(a_2 + a_3)\, ff_y}{2} + \frac{(a_4 + a_5 + a_6)\, ff_y}{2}\right) + h^2\left(\begin{array}{l}\left(\frac{(a_2 + a_3) f_{yy}}{8}\right) + \\ \frac{(a_4 + a_5 + a_6)\, ff_y^{\,2}}{128}\end{array}\right) \quad (4.6)$$

$$h^3\left(\frac{a_2^{\,3}\, ff_y^{\,3}}{16} + \frac{a_3^{\,3}\, ff_y^{\,3}}{16} + \frac{3a_2^{\,2}a_3\, ff_y^{\,3}}{16}\right)$$

Kemudian substitusikan nilai k_1, k_2, k_3, k_4 yang diperoleh pada persamaan (2.23-2.26) dan nilai $\sqrt{k_1k_2}, \sqrt{k_2k_3}\sqrt{k_3k_4}$ pada persamaan (4.5)-(4.6) sehingga diperoleh

$h^2\, ff_y$	$: \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{6}A - \frac{11}{24} = 0$
$h^3 + ff_y^{\,2}$	$: \frac{1}{24}A^2 + \frac{1}{2}a_5a_1 = 0$
$h^3 f^2\, ff_y$	$: \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{3}a_1^{\,2} = 0$
$h^4 f^3 f_{yyy}$	$: \frac{1}{9}A^3 + \frac{1}{8}a_1^{\,3} + \frac{1}{12}B = 0$

$h^4 fff_y{}^3$: $-\frac{1}{96}+\frac{1}{48}a_2{}^3=0$

$h^4 f^2 f_y ff_y$: $\frac{a_6 A^2}{4}+\frac{1}{4}a_5 a_1{}^2=0$ (4.4)

Untuk memudahkan mendapatkan nilai parameternya, dilakukan penyederhanaan dengan memisalkan :

$$A=\frac{1}{2} \text{ dan } B=1$$

Sehingga diperoleh

$h^2 ff_y$: $\frac{3}{4}a_1+\frac{1}{12}=\frac{11}{24}$

$h^3 + ff_y{}^2$: $\frac{1}{2}a_5 a_1=-\frac{1}{96}$

$h^3 f^2 ff_y$: $\frac{1}{3}a_1{}^2=\frac{1}{12}$

$h^4 f^3 f_{yyy}$: $\frac{1}{8}a_1{}^3+\frac{1}{12}=\frac{1}{72}$

$h^4 fff_y{}^3$: $\frac{1}{48}a_2{}^3=\frac{1}{96}$

$h^4 f^2 f_y ff_y$: $\frac{a_6 A^2}{4}+\frac{1}{4}a_5 a_1{}^2=0$ (4.7)

Kemudian substitusikan nilai $a_1=\frac{1}{2}$ kedalam persamaan maka didapat lah nilai-nilai $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, a_3==\frac{1}{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, a_4=\frac{49}{48}, a_5=-\frac{1}{24}, a_6=\frac{-1}{48}$

Langkah terakhir adalah dengan mensubstitusikan semua nilai parameter yang telah didapat ke dalam persamaan dan diperoleh bentuk persamaan berikut ini:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\left(\frac{k_1 + k_2 + \sqrt{k_1 k_2}}{3}\right) + \left(\frac{k_2 + k_3 + \sqrt{k_2 k_3}}{3}\right) + \left(\frac{k_3 + k_4 + \sqrt{k_3 k_4}}{3}\right)\right)$$

Dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = \left(hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}k_1 + \frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}k_2\right)\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + \frac{49}{48}k_1 - \frac{1}{24}k_2 - \frac{1}{48}k_4) \qquad (4.8)$$

4.2 Galat pada Metode Range-Kutta Orde Empat Berdasarkan Rata-rata Heronian

Untuk mendapatkan galat pada metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata heronian, langkah-langkah nya sama dengan menentukan penurunan rumusan Runge-Kutta sebelum nya. Dengan mensubstitusikan nilai parameter yang didapat kedalam persamaan 4.3 dan mengekspansikan sampai orde-5, maka akan diperoleh galat untuk metode Runge-Kutta berdasarkan rata-rata heronian sebagai berikut :

$$galat = \begin{pmatrix} \frac{192377}{512} f^5 f_y^{\ 2} f_{yy} + \frac{9}{64} f^6 f_y^{\ 2} f_{yy} + \frac{5}{2048} f^7{}_{yy}{}^2 - \frac{1}{64} f^4 f_y^{\ 8} + \frac{7577}{384} f^6 f_y f_{yyy} \\ + \frac{902249}{1536} f^4 f_y^{\ 4} + \frac{95969}{6144} f^6 f_{yy}^{\ 2} \end{pmatrix} h^5$$

4.3 Simulasi Numerik

Berikut ini adalah penyelesaian persamaan differensial dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde-4 klasik, RKG, dan RKHe.

Contoh 1 :

Persamaan differensial

$$y' = \frac{1}{y}, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1.25 \qquad (4.9)$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $y = \sqrt{2x+1}$ dengan n = 10. Tentukan penyelesaian persamaan differensial di atas dengan menggunakan Runge-Kutta orde-4 Klasik, RKG dan RKHe.

Penyelesaian:

Persamaan (4.6) diselesaikan dengan metode Runge-Kutta Klasik berdasarkan rata-rata geometri (RKG) dan rata-rata heronian(RKHe), dengan $h = 0.125000$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.6) disajikan dalam table (4.1).

Tabel 4.1: Solusi Eksak dan *Error* dari Metode Runge-Kutta Klasik, RKG, dan RKHe

i	x	y (solusi eksak)	*Error*		
			Metode RK	Metode RKG	Metode RKHe
1	0,000	1,0000000000	0,000000E+00	0,0000000000	0,0000000000
2	0,125	1,1180339887	4,2308247E-07	1,936833E-08	0,1570588039
3	0,250	1,2247448714	5,5362188E-07	2,612313E-08	0,2708486472
4	0,375	1,3228756555	5,9022188E-07	2,836203E-08	0,3625581967
5	0,500	1,4142135624	5,9242192E-07	2,880015E-08	0,4406262116
6	0,625	1,5000000000	5,8129728E-07	2,847895E-08	0,5093370958
7	0,750	1,5811388301	5,6516854E-07	2,783745E-08	0,5711838375
8	0,875	1,6583123952	5,4755259E-07	2,707297E-08	0,6277524141
9	1,000	1,7320508076	5,2998364E-07	2,627765E-08	0,6801180916
10	1,125	1,8027756377	5,1312260E-07	2,549491E-08	0,7290456569

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode Runge-Kutta orde-4 klasik memiliki bentuk umum sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h.y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan rata-rata heronian didapatkan suatu bentuk baru yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\left(\frac{k_1 + k_2 + \sqrt{k_1 k_2}}{3}\right) + \left(\frac{k_2 + k_3 + \sqrt{k_2 k_3}}{3}\right) + \left(\frac{k_3 + k_4 + \sqrt{k_3 k_4}}{3}\right)\right)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = \left(hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}k_1 + \frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}k_2 \right)\right)$$

$$k_4 = hf\,(x_n + h, y_n + \frac{49}{48}k_1 - \frac{1}{24}k_2 - \frac{1}{48}k_3)$$

Galat potongannya adalah :

$$galat = \left(\begin{array}{l} \frac{192377}{512} f^5 f_y{}^2 f_{yy} + \frac{9}{64} f^6 f_y{}^2 f_{yy} + \frac{5}{2048} f^7{}_{yy}{}^2 - \frac{1}{64} f^4 f_y{}^8 + \frac{7577}{384} f^6 f_y f_{yyy} \\ + \frac{902249}{1536} f^4 f_y{}^4 + \frac{95969}{6144} f^6 f_{yy}{}^2 \end{array} \right) h^5$$

Berdasarkan simulasi numerik dengan menggunakan metode RKHe diketahui bahwa hasil metode ini kurang memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan metode RK-4 Klasik sebelum dimodifikasi

5.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini penulis hanya menggunakan Rata-Rata Heronian untuk memodifikasi RK-4 klasik. Oleh karena itu , penulis menyarankan agar pembaca dapat lebih lanjut menemukan rumusan baru dengan menggunakan rata-rata yang lain seperti (Logaritma Mean dan Square Mean Root).

DAFTAR PUSTAKA

Ababneh, Osama Yusuf dkk *"On Cases of Fourth-Order Runge-Kutta Methods"*, *European Journal of Scientifiec Research*. Vol 31.pp 605-615.2009.

Bronson, Richard dan Costa Gariel. "*Persamaan Differensial",* edisi tiga. Erlangga, Jakarta. 2007.

Chapra, Steven C dan Raymond P. Canela. "*Metode Numerik untuk Teknik*".Universitas Indonesia. Jakarta. 1991.

Djojodihardjo, Harijono. "*Metode Numerik"*, halaman 263-276. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta. 2000.

Evans, D.J. 1991, "A New 4TH Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems With Error Control", *Intern. J. Computer Math*.Vol. 39, halaman 217-227

Leithold, Louis. "*Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik", e*disi kelima. Erlangga. Jakarta. 1993.

Martono, K. "*Kalkulus"*. Erlangga. Jakarta. 1999.

Mathews, John H. "*Numerical Method for Mathematics, Science, and Engineering*". California State University. Prentice-hall International. 1992.

Munir, Rinaldi." *Metode Numerik"*, edisi revisi. Informatika, Bandung. 2008.

Sanugi, B. B. dan D. J. Evans, 1994,"A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean*", Intern. J. Computer Math*.Vol. 50, halaman 113-118.

Yacob, Nazeeruddin dan Bahrom Sanugi. "A New Fourth-Order Embedded Method Based on The Harmonic Mean". *Universitas Teknologi Malaysia*. Jilid 14. 1998.